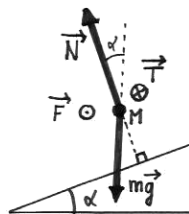


MÉCANIQUE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

I. Dénivellation d'une voie ferrée

- Le train subit son poids $m\vec{g}$, la réaction du support $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ en notant $\vec{N} = N_r \vec{u}_r + N_z \vec{u}_z$ et $\vec{T} = T \vec{u}_\theta$, et la force globale de frottement \vec{F} . Dans la configuration recherchée, \vec{N} est orthogonale au plan de la voie ferrée.
- Le mouvement étant circulaire horizontal de rayon ρ , on a $\vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \rho\dot{\theta} \vec{u}_\theta$. Le mouvement étant uniforme alors $\dot{\theta} = 0$, et sa vitesse est $v = \rho\dot{\theta}$.

On a donc $\vec{a} = -\frac{v^2}{\rho} \vec{u}_r$.



- Le référentiel étant galiléen, on applique le théorème de la résultante cinétique au système train :

$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_z + N_r \vec{u}_r + N_z \vec{u}_z + T \vec{u}_\theta + F \vec{u}_\theta$$

Par projection selon \vec{u}_θ on trouve $T = -F$. Le moteur compense les frottements, ce qui ne nous intéresse pas ici.

On projette selon \vec{u}_r : $N_r = -m\frac{v^2}{\rho}$. On projette selon \vec{u}_z : $N_z = mg$.

- La condition géométrique imposée à \vec{N} , qui doit être orthogonale à la voie, se traduit par

$$\frac{|N_r|}{N_z} = \tan \alpha.$$

Toutefois on veut extraire h donc il est préférable de travailler directement sur

$$\sin \alpha = \frac{h}{d} = \frac{|N_r|}{\sqrt{N_r^2 + N_z^2}} = \left(1 + \frac{N_z^2}{N_r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad \frac{N_z}{N_r} = -\frac{g\rho}{v^2} \quad \text{d'où} \quad h = d \left(1 + \frac{g^2\rho^2}{v^4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On constate bien que plus le rayon de courbure est petit (virage serré) ou plus la vitesse est grande, plus il faut relever la voie, ce qui est conforme à l'expérience courante (notamment en voiture pour éviter les tonneaux).

II. Microscope

II.1. Puissance et pouvoir séparateur

- Dans les conditions de Gauss, les rayons sont *paraxiaux*, c'est-à-dire peu inclinés par rapport à l'axe optique et de point d'incidence sur le système optique.
 - Un objet ponctuel est le lieu de convergence des supports des rayons incidents sur le système optique, lorsque ce lieu est un point (réel ou virtuel).
 - Une image est le lieu de convergence des supports des rayons émergent du système optique.
 - Un instrument stigmatique est tel que tout objet ponctuel admet une image ponctuelle.
 - Une lentille mince n'est pas rigoureusement stigmatique, mais elle l'est de façon approchée dans les conditions de Gauss.
- Un œil emmétrope a son punctum remotum à l'infini, donc voit sans effort d'accommodation à l'infini. Pour cette raison on place A_1 en F_2 de sorte que son image soit à l'infini.
 - Une image est **réelle** si les rayons qui la forment passent effectivement en ce point. Elle est **virtuelle** si seuls les supports des rayons y passent, mais pas les rayons eux-mêmes. A_1 étant du côté des rayons émergent de \mathcal{L}_1 , il s'agit d'une **image réelle par \mathcal{L}_1** .

- cf cours. On obtient la relation de conjugaison $\overline{F_1 A_0} \cdot \overline{F_1' A_1} = -f_1'^2$ et de grandissement transversal

$$\gamma = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_0 B_0}} = \frac{f_1'}{F_1 A_0} = -\frac{\overline{F_1' A_1}}{f_1'}$$

- D'après l'énoncé $\overline{F_1' A_1} = \overline{F_1' F_2} = \Delta$. La conjugaison donne donc $\overline{F_1 A_0} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$.

- L'objet B_0 est obtenue par l'intersection d'au moins deux rayons remarquables convergeant en B_1 : i) un rayon passant par le centre optique n'est pas dévié, ii) un rayon passant par le foyer objet émerge parallèle à l'axe optique, iii) un rayon incident parallèle à l'axe émerge en passant par le foyer image.
 - L'objet A_0 est obtenu par aplanétisme en projetant B_0 orthogonalement à l'axe Δ . cf figure ci-dessous.

- En considérant les carreaux de taille 1 cm x 1 cm, la figure conduit à $\overline{F_1 A_0} = -1,0$ cm.

La relation de conjugaison donne, pour $f_1' = 2,0$ cm et $\Delta = 4,0$ cm : $\overline{F_1 A_0} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -1,0$ cm, ce qui est en accord avec la construction.

- Comme $\overline{F_1' A_1} = \overline{F_1' F_2} = \Delta$ on obtient $\gamma_{ob} = -\frac{\Delta}{f_1'}$.

- D'après la construction (rayon 2 issu de A_0 passant par F_1 , ou rayon 4 de support $(B_1 O_2)$ en vert), l'angle α' vérifie $\tan \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f_2}$, avec $\tan \alpha' \approx \alpha'$ dans les conditions de Gauss. En introduisant γ_{ob} on obtient

$$P = \left| \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_0 B_0} \cdot f_2'} \right| = \frac{|\gamma_{ob}|}{f_2'} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} = 900 \delta.$$

- En utilisant la puissance on obtient $D = \frac{\beta}{P} \approx 0,5 \mu\text{m}$ en prenant $\beta \approx 5 \cdot 10^{-4}$ rad. Le microscope permet donc d'observer **des détails de l'ordre du micron**, ce qui est utile pour la biologie (cellules, bactéries).

II.2. Latitude de mise au point

- L'observateur myope souhaite rapprocher l'image finale, qui doit donc devenir virtuelle car $\overline{O_2 A_2} < 0$. La relation de Newton $\overline{F_2 A_1} \cdot \overline{F_2' A_2} = -f_2'^2$ conduit à $\overline{F_2 A_1} > 0$ car $\overline{F_2' A_2} < 0$. Donc il faut **déplacer l'oculaire vers la gauche** pour le rapprocher de A_1 .

5. a) On note les images successives ainsi : $A_m \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_{1m} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_{2m}$. En utilisant la relation de Newton de proche en proche on obtient

$$\overline{F_1 A_m} = -\frac{f_1'^2}{F_1' A_{1m}} = -\frac{f_1'^2}{F_1' F_2 + F_2' A_{1m}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + F_2' A_{1m}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta - \frac{f_2'^2}{F_2' A_{2m}}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta - \frac{f_2'^2}{F_2' O_2 + O_2' A_{2m}}}$$

$$\boxed{\overline{F_1 A_m} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{f_2' + d_m}}}$$

- b) D'après la relation trouvée en 3.a) et en prenant $d_m \approx 25$ cm, on obtient : $A_m A_0 = \frac{f_1'^2}{\Delta} - \frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{f_2' + d_m}} \approx$

$4,5 \mu\text{m}$. On note que $A_m A_0 \sim D$, donc cette valeur est **du même ordre de grandeur que les plus petits détails transversaux** que l'on souhaite regarder. Cela signifie que malgré la capacité d'accommodation de l'œil, le microscope impose une observation dans une tranche de l'échantillon d'épaisseur compatible avec la taille de ce que l'on souhaite observer. On ne risque donc pas d'observer une superposition de plusieurs objets situés dans des plans transverses différents (plusieurs cellules, bactéries), ce qui nuirait à la qualité de l'observation.

11.3. Champ et luminosité

6. a) On réutilise ici le rayon 2 déjà tracé (en bleu), ainsi qu'un autre rayon (le 5 ou le 6, en rose). Ils émergent forcément parallèles entre eux car B_2 est à l'infini. cf figure.
 b) Les deux rayons roses choisis sont en fait des rayons extrêmes du faisceau constituant l'image de B_0 , l'un passant par le bord de l'objectif (5), l'autre par le bord de l'oculaire (6). Le point B_1 ne sera plus visible à travers l'oculaire dès lors que ce faisceau sera réduit à un unique rayon, c'est-à-dire si ce rayon passe par les extrémités de l'objectif et de l'oculaire (cf trait rose en pointillés). Ceci permet de localiser $B_{1\text{max}}$, que l'on reproduit en bas par symétrie pour plus de clarté. Le théorème de Thalès conduit alors à

$$\frac{A_1 B_{1\text{max}} - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{O_1 F_2}{O_1 O_2} = \frac{f_1' + \Delta}{f_1' + \Delta + f_2'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{A_1 B_{1\text{max}} = r_1 + \frac{(r_2 - r_1)(f_1' + \Delta)}{f_1' + \Delta + f_2'}}$$

- c) Le grandissement transversal obtenu en 3.b) permet de connaître le rayon du champ de vision :

$$r_{\text{champ}} = \frac{A_1 B_{1\text{max}}}{|\gamma_{\text{ob}}|} \quad \text{d'où} \quad \boxed{r_{\text{champ}} = \frac{f_1'}{\Delta} \left(r_1 + \frac{(r_2 - r_1)(f_1' + \Delta)}{f_1' + \Delta + f_2'} \right)} = 0,53 \text{ mm}.$$

De nouveau on trouve que l'observation correspond à une zone très limitée sur l'échantillon.

7. a) On trace 2 rayons remarquables issus de M_1 (en rouge, rayons 7 et 8). On note M_2 leur intersection, image de M_1 par l'oculaire \mathcal{L}_2 .
 b) Tous les rayons émergent de l'oculaire sont d'abord passés par l'objectif. Donc par symétrie de révolution, l'ensemble du faisceau lumineux émergent du microscope a pour section transverse au niveau de M_2 un disque de centre O_{oc} (projeté orthogonal de M_2 sur l'axe), qui est **l'image du disque de l'objectif par l'oculaire**, appelé le **cercle oculaire**.

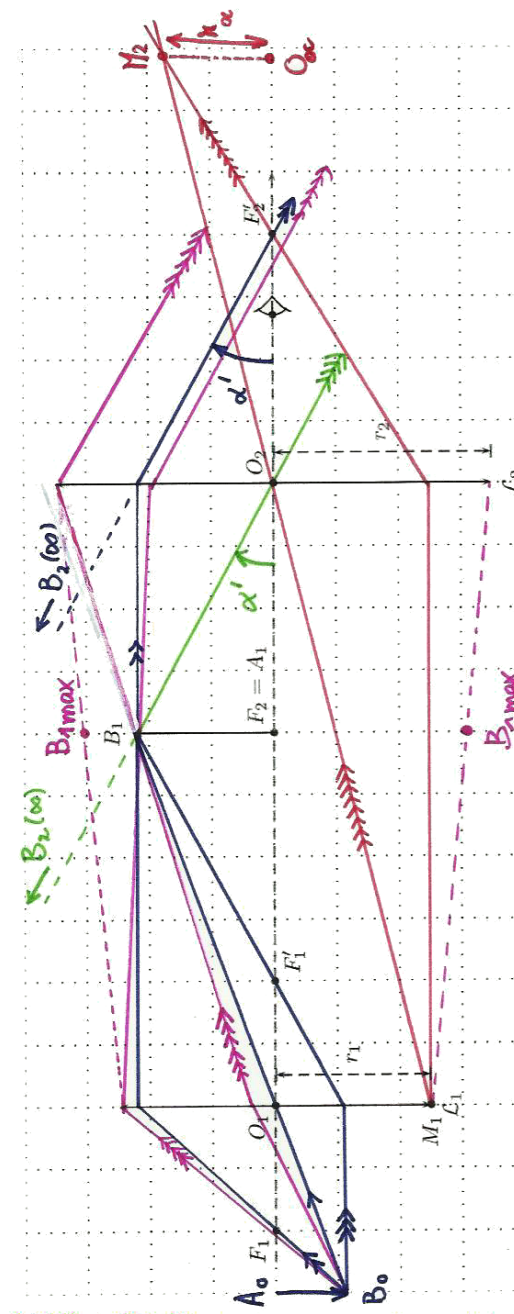
Son rayon vérifie $r_{oc} = |\gamma_{oc}| \cdot r_1$, avec $\gamma_{oc} = \frac{f_2'}{F_2' O_1}$ le grandissement de l'oculaire par la formule de

Newton. D'où $r_{oc} = \frac{r_1 f_2'}{f_1' + \Delta} = 0,53 \text{ mm}$ (assez petit pour pénétrer intégralement dans la pupille).

La position de ce cercle est obtenue par la relation de conjugaison :

$$\overline{O_2 O_{oc}} = \overline{O_2 F_2'} + \overline{F_2' O_{oc}} = f_2' - \frac{f_2'^2}{F_2' O_1} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overline{O_2 O_{oc}} = f_2' + \frac{f_2'^2}{f_1' + \Delta}} = 2,2 \text{ cm},$$

ce qui confirme qu'il est situé très près du foyer image F_2' .

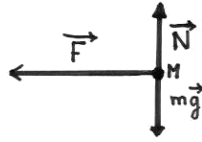


III. Étude de systèmes masse-ressort

III.1. Oscillation d'une seule masse

1.

- a) La masse subit son poids $m\vec{g}$, la réaction normale \vec{N} qui lui est exactement opposée car il n'y a pas de mouvement vertical, et la force élastique \vec{F} . On choisit un instant où le ressort est étiré, donc \vec{F} est dirigée vers la gauche.



- b) La loi de Hooke s'écrit ici $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$ en notant ℓ la longueur du ressort. Or $\ell = x$ d'après le choix d'origine. Le mouvement est rectiligne donc l'accélération s'écrit $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$. Par projection selon \vec{u}_x du théorème de la résultante cinétique dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen, on obtient donc

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0} \text{ avec } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

- c) Le second membre étant constant, la solution générale s'écrit $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0$. La position de repos correspond au ressort non comprimé, donc $x = \ell_0$. Les conditions initiales $x(0) = \ell_0 - \Delta\ell$ et $\dot{x}(0) = 0$ permettent de trouver les constantes A et B , d'où $\boxed{x(t) = -\Delta\ell \cos(\omega_0 t) + \ell_0}$.

- d) Avec ces nouvelles conditions initiales, $x(0) = \ell_0 \Rightarrow A = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$ d'où $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \ell_0}$.

- e) On cherche une condition pour que $x(t) > 0$ pour tout t , on cherche donc sa position extrême x_{\min} à gauche.
Premier cas : $x_{\min} = -\Delta\ell + \ell_0 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta\ell < \ell_0}$ ce qui est forcément vérifié puisque le ressort est lâché comprimé.
Second cas : $x_{\min} = -\frac{v_0}{\omega_0} + \ell_0 > 0 \Leftrightarrow \boxed{v_0 < \ell_0 \omega_0}$, ce qui nécessite une vitesse suffisamment faible.

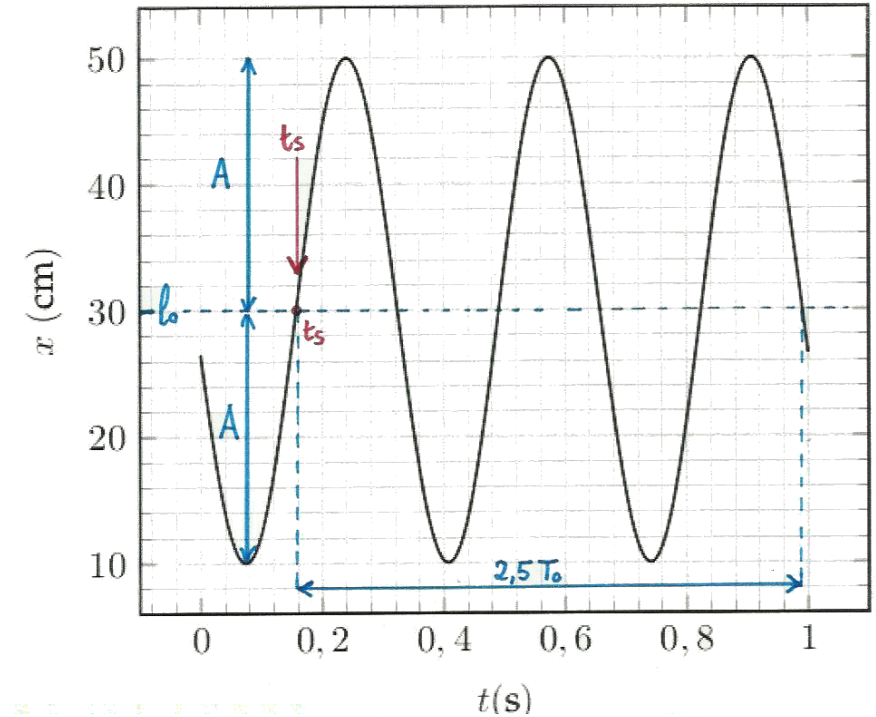
2. a) La longueur à vide ℓ_0 correspond à la position d'équilibre, et donc à la position centrale (équidistante des extrêmes). C'est aussi un point d'inflexion pour $x(t)$ car la force y étant nulle, c'est un extremum de vitesse : $\ell_0 = 30,0 \text{ cm}$.
On en déduit l'amplitude, qui est aussi la moitié de l'amplitude crête à crête : $A = 20,0 \text{ cm}$.
La période est mesurée grâce aux zéros du cosinus les plus éloignés, soit $2,5T_0 = 0,99 - 0,16 = 0,83 \text{ s}$ d'où $T_0 = 0,33 \text{ s}$ (cf graphe ci-dessous).

b) On a $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ d'où $\boxed{k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = 36 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}$.

III.2. Mouvement conjoint de 2 masses indépendantes

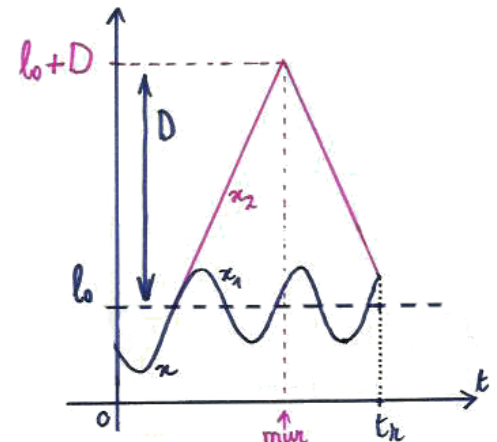
3. a) Le ressort exerce une traction dès lors que sa longueur dépasse ℓ_0 , donc $x > \ell_0$. Ceci se produit pour la première fois à $t_s = 0,16 \text{ s}$ (cf graphe).
b) La séparation correspond au croisement de la position d'équilibre par le système des 2 masses, qui vérifie $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \ell_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ pour $t \leq t_s$. On a alors $\boxed{x(t_s) = \ell_0}$ et $\cos(\omega_0 t_s + \varphi) = 0$, donc $\sin(\omega_0 t_s + \varphi) = -1$ car c'est un zéro montant du cosinus (c'est-à-dire $\omega_0 t_s + \varphi = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$). Ceci permet d'écrire que la vitesse est maximale à cet instant : $\boxed{\dot{x}(t_s) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_s + \varphi) = A\omega_0}$. Pour $t > t_s$, on a maintenant la position de M_1 qui vérifie $x_1(t) = A' \cos(\omega_1(t - t_s)) + B' \sin(\omega_1(t - t_s)) + \ell_0$ avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$. On applique ces nouvelles conditions initiales par continuité de la position et de la vitesse :

$x_1(t_s) = \ell_0 = A' + \ell_0$ donc $A' = 0$; puis $\dot{x}_1(t_s) = A\omega_0 = B'\omega_1$ d'où $B' = A \frac{\omega_0}{\omega_1} = A \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$.
D'où finalement $\boxed{x(t) = A \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sin(\omega_1(t - t_s)) + \ell_0}$ avec $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}}$ et A tel que déterminé en 2.a).



4.

- a) Par continuité la vitesse de M_2 est la même que celle de M_1 à $t = t_s$, donc $\boxed{\dot{x}_2(t_s) = A\omega_0}$. Par la suite M_2 ne subit aucune force horizontale, sauf celle du mur au moment du choc. Donc son mouvement est rectiligne uniforme ($\ddot{x}_2 = 0$) et de vitesse $A\omega_0\vec{u}_x$ avant le choc et $-A\omega_0\vec{u}_x$ après.
b) Graphiquement, le mouvement de M_2 correspond à 2 segments de droite symétriques par rapport à l'instant du choc contre le mur. La pente du premier est égale à celle de $x_1(t)$ au moment de la séparation. L'intersection du second avec $x_1(t)$ donne t_r . cf figure ci-contre.



c) La recombinaison doit avoir lieu lorsque $\dot{x}_1 = -A\omega_0$, donc au moment où $x_1 = \ell_0$ en décroissant. Cela se produit au bout d'un nombre demi-impair de périodes $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, donc à l'instant $t_r = t_s + (n + \frac{1}{2})T_1$ avec $n \in \mathbb{N}$. Pendant ce temps, M_2 a réalisé un aller-retour donc parcouru la distance $2D$ à la vitesse $A\omega_0$, pendant la durée $\frac{2D}{A\omega_0} = (n + \frac{1}{2})T_1$. De cette dernière équation on déduit

$$\frac{2D}{A\omega_0} = (n + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m}} = \frac{D}{\pi A (n + \frac{1}{2})} \quad \text{d'où}$$

$$m_1 = m \frac{D^2}{\pi^2 A^2 (n + \frac{1}{2})^2} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad m_2 = m - m_1.$$

Notons que l'on doit avoir nécessairement $m_1 < m$, donc

$$\frac{D^2}{\pi^2 A^2 (n + \frac{1}{2})^2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{D}{\pi A} - \frac{1}{2} = \underline{1,9} \quad \text{d'où} \quad \boxed{n \geq 2}.$$

Il y a donc une infinité de solutions. Par exemple :

$$\begin{array}{l} n = 2 : \quad m_1 = 92 \text{ g}, \quad m_2 = 9 \text{ g}; \\ n = 3 : \quad m_1 = 47 \text{ g}, \quad m_2 = 53 \text{ g}; \\ n = 4 : \quad m_1 = 28 \text{ g}, \quad m_2 = 72 \text{ g}; \\ \dots \end{array}$$

5. À partir de l'instant de recombinaison t_r la position de l'ensemble est $x(t_r) = x(t_s)$ et sa vitesse est $\dot{x}(t_r) = -\dot{x}(t_s) = -A\omega_0$. Donc au bout d'une demi-période $\frac{T_0}{2}$, c'est-à-dire à l'instant

$$t = t_r + \frac{T_0}{2} = t_s + (n + \frac{1}{2})T_1 + \frac{T_0}{2} = t_s + \frac{2D}{A\omega_0} + \frac{T_0}{2} = t_s + T_0 \left(\frac{D}{A\pi} + \frac{1}{2} \right),$$

le système se retrouve dans le même état qu'à l'instant t_s (même position et même vitesse). Par conséquent le mouvement va se poursuivre de façon identique en enchaînant des cycles séparation-recombinaison

périodiques de durée $T = T_0 \left(\frac{D}{A\pi} + \frac{1}{2} \right) = \underline{0,96 \text{ s}}$.